

Date: 2018/5/14 الاثنين

Subject: ...

المعادلة التفاضلية

المعادلة التفاضلية ذات المتغيرات المستقلة. والتي تسمى بالمعادلة التفاضلية الخطية ذات معاملات ثابتة.

المعادلة التفاضلية ذات المتغيرات المستقلة

إن المعادلة التفاضلية ذات المتغيرات المستقلة من الشكل:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

ليجاد الحل العام لها

ما كنا نريد هذه المعادلة التفاضلية إلى معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة.

نضع بدالة $x = e^t$ أي $dx = e^t dt$ التالي

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t} = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

ومنه يتبع

$$x y' = \frac{dy}{dt} = D_t y$$

$$x y' = D_t y$$

$$y'' = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) \frac{1}{x}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) \frac{1}{x} = \left(-e^{-t} \frac{dy}{dt} + e^{-t} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \frac{1}{x}$$

$$= \left(-\frac{1}{x} D_t y + \frac{1}{x} D_t^2 y \right) \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} D_t (D_t - 1) y$$

$$x^2 y'' = D_t (D_t - 1) y$$

فيكون:

$$x^2 y'' = D_t (D_t - 1) y$$

ومثل ذلك يمكننا تخميناً قد أتت:

$$x^3 y''' = D_x (D_x - 1) (D_x - 2) y$$

- يمكن وضع العموم قد أتت:

$$x^n y^{(n)} = D_x (D_x - 1) (D_x - 2) \dots (D_x - n + 1) y$$

الآن: بالتعويض في المعادلة (1) حصل على معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة ذات معاملات ثابتة.

نحول نوجد إلى العلم لهذه المعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة تماماً كما درسنا في الفصل الثاني.

مثال: نوجد التي تلزم للمعادلة التفاضلية التالية وذلك عند قبولنا بأن معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة:

$$x^2 y'' + x y' - y = 0$$

لمعادلة التفاضلية المعطاة هي من الممكن

$$x^2 y^{(2)} + x y^{(1)} - y = 0$$

معادلة أدر

لحلها نقرض أن: $x = t$ $\Rightarrow dx = dt$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

فيكون:

$$x y' = D_t y \quad \wedge \quad x^2 y'' = D_t (D_t - 1) y$$

$$D_t (D_t - 1) y + D_t y - y = 0$$

نحو هذا في المعادلة فيكون:

$$D_t^2 y - D_t y + D_t y - y = 0$$

$$D_t^2 y - y = 0 \Rightarrow (D_t^2 - 1) y = 0$$

المعادلة المميزة هي $m^2 - 1 = 0$ جذورها

$$m_1 = 1 \quad \text{and} \quad m_2 = -1$$

Date : / /



3

Subject:

الحل العام للمعادلة هو: $y_h = A_1 e^t + A_2 e^{-t}$
 فيكون الحل العام للمعادلة هو:

$$t = \ln x \Rightarrow x = e^t$$

$$y_h = A_1 x + \frac{A_2}{x}$$

- مثال:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية باستخدام طريقة المتغيرات المتماثلة.
 معادلتها هي: $x^2 y'' - 2xy' = \sin(\ln x)$

$$D_x (D_x - 1) y - 2y = \sin t$$

$$D_x^2 y - D_x y - 2y = \sin t$$

معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة وغير متجانسة.

$$y = y_h + y_p$$

- إيجاد y_h

$$(D_x^2 - D_x - 2) y = 0$$

$$m^2 - m - 2 = 0$$

معادلة المميز:

$$(m-2)(m+1) = 0$$

$$m_1 = 2 \text{ and } m_2 = -1$$

الحل العام للمتجانسة الناتجة هو: $y_h = A_1 e^{2t} + A_2 e^{-t}$

- إيجاد y_p

هناك ثلاث طرق لإيجاد y_p الأولى: افتراض حل من الشكل $A \sin t + A_2 \cos t$

الثانية: استخدام المؤثر التفاضلي العكسي

الثالثة: كاتراف

الآن: نؤثر على الطرفين بالمؤثر التفاضلي العكسي:

$$\frac{1}{D_x^2 - D_x - 2}$$

$$y_p = \frac{1}{D_x^2 - D_x - 2} \sin t = \frac{1}{-1 - D_x - 2} \sin t$$

$$= -\frac{1}{D_x + 3} \sin t = -\frac{1}{1+9} (-\cos t + 3 \sin t)$$

$$= -\frac{1}{20} (\cos t + 3 \sin t)$$

الحل العام هو:

$$A_1 e^{2t} + A_2 e^{-t} + \frac{1}{10} \cos t - \frac{3}{20} \sin t$$

نكتب كل العام للمعادلة الخطية:

$$y = A_1 x^2 + \frac{A_2}{x} + \frac{1}{10} \cos \ln x - \frac{3}{20} \sin \ln x$$

وكان بإمكان أن نجد y باستخدام الاختلاف وذلك كما يلي:

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dt + y_2 \int \frac{w_2}{w} dt$$

$$w(e^{2t}, e^{-t}) = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ 2e^{2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -e^t - 2e^t = -3e^t$$

$$w_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \sin t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -e^{-t} \sin t$$

$$\frac{w_1}{w} = \frac{-e^{-t} \sin t}{-3e^t}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} e^{2t} & 0 \\ 2e^{2t} & \sin t \end{vmatrix} = e^{2t} \sin t$$

$$\int \sin t$$

$$\frac{w_2}{w} = \frac{e^{2t} \sin t}{-3e^t}$$

$$y_p = \frac{e^{2t}}{e^t} \int \frac{-3e^{-t} \sin t}{-3e^t} dt + \frac{e^t}{e^t} \int \frac{-3e^t \sin t}{-3e^t} dt$$

$$= \frac{1}{3} e^t \int \sin t dt - \frac{1}{3} e^t \int \sin t dt$$

$$y_p = e^t \left(\frac{1}{3} \int \sin t dt - \frac{1}{3} \int \sin t dt \right) = 0$$

ب) لتأخذ الحد العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x^3 y''' - x^2 y'' - 2y' - 2y = x^3 + 3x$$

أعتمد صيغة المعادلة

وذلك بعد تحويلها إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة.

$$\frac{dx}{dx} = \frac{1}{x} \leftarrow x = e^z$$

$$xy' = D_y y$$

$$x^2 y'' = D_y (D_y - 1) y$$

$$x^3 y''' = D_y (D_y - 1)(D_y - 2) y$$

نعمض في المعادلة التفاضلية السابقة

$$D_y (D_y - 1)(D_y - 2) y - D_y (D_y - 1) y + 2D_y y - 2y = e^{3z} + 3e^z$$

$$(D_y (D_y - 1)(D_y - 2) - D_y (D_y - 1) + 2D_y - 2) y = e^{3z} + 3e^z$$

$$(D_y^3 - 3D_y^2 + 2D_y - D_y^2 + D_y + 2D_y - 2) y = e^{3z} + 3e^z$$

وبالتالي فإن:

$$[D_y^3 - 4D_y^2 + 5D_y - 2] y = e^{3z} + 3e^z$$

معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة الحد العام لها هو:

$$y = y_h + y_p$$

$$[D_y^3 - 4D_y^2 + 5D_y - 2] y = 0$$

المعادلة المتجانسة المناظرة هي:

$$m^3 - 4m^2 + 5m - 2 = 0$$

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

$$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = -\frac{D}{A} \Rightarrow m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 2$$

نلاحظ أن $m=1$ هي جذر المعادلة التفاضلية: فقم بـ (m-1)

$$(m-1)(m^2 - 3m + 2) = 0$$

$$(m-1)(m-1)(m-2) = 0$$

$$m_1 = m_2 = 1 \quad m_3 = 2$$

$$y_h = e^z (A + Bz) + A_3 e^{2z}$$

$$y_p = B_1 e^{3z} + B_2 z e^{3z}$$

نلاحظ أن صارت اشتراك بين y_h و y_p لذلك الاشتراك وقت إبعاده

الأساسية.

مربيّة المحوّر التفاضلي العكسي:

Date :

/ /

(6)



Subject:

$$\begin{aligned}
 y_p &= \frac{1}{D^3 - 4D^2 + 5D - 2} e^{3t} + 3 \cdot \frac{1}{D^3 - 4D^2 + 5D - 2} e^t \\
 &= \frac{1}{4} e^{3t} + 3 \cdot \frac{t^2 e^t}{4} \quad \text{حيث ان } y''|_{D=1} = 2 \\
 &= \frac{e^{3t}}{4} - \frac{3}{2} t^2 e^t
 \end{aligned}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$y = y_h + y_p$$

$$y = A_1 e^t + A_2 t e^t + A_3 e^{2t} + \frac{1}{4} e^{3t} - \frac{3}{2} x \cdot \ln^2 x$$

~~xx~~
~~xx~~
~~xx~~

المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة

$$(Px+Q)^n y^{(n)} + q_1(Px+Q)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + q_{n-1} y = 0$$

حيث q, q_1, \dots, q_{n-1} ثوابت حقيقية. كذلك P, Q دالة في x .
نحو الحالة الخاصة عندما $P=1, Q=0$ نقول ان المعادلة آدر

$$\frac{dt}{dx} = \frac{P}{e^t} \Rightarrow P dx = e^t dt \quad \leftarrow (Px+Q) = e^t$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{P}{Px+Q} \frac{dy}{dt} \Rightarrow (Px+Q) y' = P \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{P}{Px+Q} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dx} \left(P e^{-t} \frac{dy}{dt} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{e^t} \frac{dy}{dt} \right) \left(\frac{dt}{dx} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(P e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) \frac{P}{e^t} = -P e^{-t} \frac{dy}{dt} + P e^{-t}$$

$$= \frac{P^2}{e^{2t}} (-D_t + D_t^2) y$$

أي إن:

$$(Px+Q)^2 y'' = P^2 (D_t + D_t^2) y$$

وبعد التكرار نجد أن:

$$(Px+Q)^3 y''' = P^3 D_t (D_t - 1) (D_t - 2) y$$

$$(Px+Q)^n y^{(n)} = P^n D_t (D_t - 1) \dots (D_t - n + 1) y$$

وبهذا نرى ان المعادلة التفاضلية متجانسة من الدرجة n لها حلول من الشكل $y = e^{-t} x^n$ حيث $t = \int \frac{P}{Px+Q} dx$.
حيث P, Q دالة في x .
نحو الحالة الخاصة عندما $P=1, Q=0$ نقول ان المعادلة آدر

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(2x+1)^2 y'' + 2(2x+1) y' + y = 0$$

نقوم بوضع $2x+1 = e^t$ ^{بفرض}

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2}{e^t} \leftarrow 2dx = e^t dt$$

$$(2x+1) y' = D_t y$$

$$(2x+1)^2 y'' = 4D_t(D_t-1)y$$

نقوم بتحويل المعادلة التفاضلية :

$$4D_t(D_t-1)y + 4D_t y + y = 0$$

$$4D_t^2 - 4D_t y + 4D_t y + y = 0$$

$$(4D_t^2 - 1)y = 0$$

معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات ثابتة المعادلة المميزة هي

$$4m^2 + 1 = 0$$

$$m^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{1}{4} i^2$$

$$m_1 = \frac{1}{2} i \quad \wedge \quad m_2 = -\frac{1}{2} i$$

والسليم فإن الحل العام لا يسرع بالشكل :

$$y = A_1 e^{\frac{1}{2} t} + A_2 e^{-\frac{1}{2} t}$$

فالحل العام للمعادلة المعطاة هو :

$$y_h = A_1 \cos \frac{1}{2} \ln(2x+1) + A_2 \sin \frac{1}{2} \ln(2x+1)$$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$(x+1)^3 y'' + 3(x+1)^2 y' + (x+1)y = 6 \ln(x+1)$$

الحل : نقوم بحذف المعادلة التفاضلية ثم $x+1$ لتحويل إلى معادلة ليونارد

$$(x+1)^2 y'' + 3(x+1)y' + y = 6 \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{e^t} \quad \leftarrow x+1 = e^t \quad \text{نقوم بـ } t$$

$$(D_1 y)' = D_1 y \quad \text{and} \quad (x+1)^2 y'' = D_2 (D_2 - 1) y$$

نقوم بتحويل

$$D_2 (D_2 - 1) y + 3 D_2 y + y = \frac{6 \ln e^t}{e^t}$$

$$(D_2^2 + 2D_2 + 1) y = 6 t e^{-t} \quad \text{أي أن}$$

$$y = y_h + y_p$$

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

المعادلة المميزة

$$(m+1)^2 = 0 \rightarrow m_1 = m_2 = -1$$

فالحل العام هو

$$y_h = e^{-t} (A_1 + A_2 t) = A_1 e^{-t} + A_2 t e^{-t}$$

المفرد

الحل الخاص بالطريقة المعادلات غير المتجانسة هو

$$y_p = (B_1 t + B_2) e^{-t}$$

نلاحظ أنه هناك اشتراك بين y_p و y_h نزيد الاشتراك مرة أخرى
بأقل قوة لا تحتوي ذلك الاشتراك:

$$y_p = (B_1 t^3 + B_2 t^2) e^{-t}$$

لنوجد الحل الخاص ونستخدم طريقة المؤثر المتعاظلة العكسي

لنؤثر مع طرفي لا بالمؤثر المتعاظلة العكسي $\frac{1}{D^2 + 2D + 1}$ فبذلك:

$$y_p = \frac{1}{(D+1)^2} 6 t e^{-t}$$

$$y_p = 6 e^{-t} \frac{1}{(D+1-1)^2} t^3 = 6 e^{-t} \frac{1}{D^2} t^3 = 6 e^{-t} \frac{t^3}{6} = t^3 e^{-t}$$

الحل العام